Osnovi računarstva I

Bulova algebra

- Oblast koja tretira logičke iskaze i promjenljive koji imaju samo jednu od dvije moguće vrijednosti: ”tačan” i ”netačan”
- Binarne cifre mogu se posmatrati kao članovi skupa {0,1}
- Promjenljive koje mogu uzimati samo jednu od ove dvije vrijednosti uobičajeno je da označimo velikim slovima A, B, C,…, X, Y, Z
- Dvočlana Bulova algebra definisana je kao uređena šestorka (**B**,$\cdot$,+,$\overline{}$,0,1)
- **B=**{0,1}
- Aksiomi Bulove algebre:

1. $A\cdot B=B\cdot A$ i $A+B=B+A$
2. $A\cdot(B+C)=(A\cdot B)+(A\cdot C)$ i $A+(B\cdot C)=(A+B)\cdot(A+C)$
3. $A+0=A$ i $A\cdot 1=A$
4. $A\cdot\overline{A}=0$ i $A+\overline{A}=1$
5. $0\neq 1$.

- Operacija logičkog množenja ima veću važnost od operacije logičkog sabiranja. Na primjer, u aksiomu 2 izraz $A+(B\cdot C)$ identičan je izrazu $A+B\cdot C$

- Na osnovu navedenih aksioma možemo dokazati nekoliko važnih zakona:

  - *Prvi zakon ograničenosti*: U Bulovoj algebri važi jednakost $A+1=1$

    Dokaz: Pođimo od desne strane gornje jednakosti. Iz aksioma 4 slijedi da je $1=A+\overline{A}$, a na osnovu aksioma 3: $\overline{A}=\overline{A}\cdot 1$.
    Kombinovanjem ovih aksioma: $1=A+\overline{A}\cdot 1$

    Primjenom aksioma 2 u obliku $A+(B\cdot C)=(A+B)\cdot(A+C)$, gdje je B $\rightarrow$ $\overline{A}$ i C $\rightarrow$ 1, dobija se $1=\left(A+\overline{A}\right)\cdot\left(A+1\right)$

    Primjenom aksioma 4 u obliku $A+\overline{A}=1$: $1=1\cdot\left(A+1\right)$

    Primjenom aksioma 3 u obliku $A\cdot 1=A$: $1=A+1$

  - *Drugi zakon ograničenosti*: U Bulovoj algebri važi jednakost $A\cdot 0=0$

  - *Zakon idempotentnosti*: $A+A=A$ i $A\cdot A=A$

- Definicije logičkih operacija sabiranja (+) i množenja (·), kao i unarne operacije komplementiranja (¯) za slučaj dvočlane Bulove algebre:

Sabiranje (+)	Množenje (·)	Komplementiranje
logičko ILI ($\vee$)	logičko I ($\wedge$)	logičko NE
$0+0=0$	$0\cdot 0=0$	$\overline{0}=1$
$0+1=1$	$0\cdot 1=0$	$\overline{1}=0$
$1+0=1$	$1\cdot 0=0$	
$1+1=1$	$1\cdot 1=1$	

- Definicije gornjih operacija slijede iz aksioma i zakona. Na primjer:
  - Iz aksioma 3 ($\mathrm{A}+0=\mathrm{A}$) slijede izrazi: $0+0=0$ i $1+0=1$
  - Iz aksioma 1 (aksiom komutativnosti): $0+1=1+0=1$
  - Iz zakona idempotentnosti ($\mathrm{A}+\mathrm{A}=\mathrm{A}$): $1+1=1$

- Radi lakšeg rada “sumiramo” *pravila* Bulove algebre
    - Pravilo sa konstantnim vrijednostima:

$$A + 0 = A$$
$$A + 1 = 1$$
$$A \cdot 0 = 0$$
$$A \cdot 1 = A$$

    - Pravilo sa ponovljenim vrijednostima:

$$A + A = A$$
$$A \cdot A = A$$

    - Pravilo sa komplementarnim vrijednostima:

$$A + \overline{A} = 1$$
$$A \cdot \overline{A} = 0$$

    - Pravilo sa dvostruko komplementiranim vrijednostima:

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

- DE MORGANOVA TEOREMA

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

A	B	A+B	$\overline{A+B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cdot \overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

A	B	$A \cdot B$	$\overline{A \cdot B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}+\overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

- DE MORGANOVA TEOREMA ZA VIŠE PROMJENLJIVIH
  - $\overline{A+B+C} = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C},$
    - Dokaz: $\overline{A+B+C} = \overline{A+(B+C)} = \overline{A}\cdot\overline{B+C} = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C},$
  - $\overline{A\cdot B\cdot C} = \overline{A}+\overline{B}+\overline{C}.$
    - Dokaz: $\overline{A\cdot B\cdot C} = \overline{A\cdot(B\cdot C)} = \overline{A}+\overline{B\cdot C} = \overline{A}+\overline{B}+\overline{C}.$
  - Analogno:

$$\overline{X_1+X_2+\ldots+X_N} = \overline{X}_1\cdot\overline{X}_2\cdot\ldots\cdot\overline{X}_N,$$

$$\overline{X_1\cdot X_2\cdot\ldots\cdot X_N} = \overline{X}_1+\overline{X}_2+\ldots+\overline{X}_N.$$

- Primjer identiteta $\left(A+B\right)\cdot\left(A+\overline{B}\right)=A$

  - Dokaz:

$$\left(A+B\right)\cdot\left(A+\overline{B}\right)$$

$$=A\cdot A+A\cdot\overline{B}+A\cdot B+B\cdot\overline{B} \quad \text{2-struka primjena aksioma 2}$$

$$=A+A\cdot\left(\overline{B}+B\right) \quad \text{pravilo pon. vr., aks. 2, pravilo komp. vr.}$$

$$=A+A \quad \text{pravilo kom. vrij. i pravilo konst. vr.}$$

$$=A \quad \text{pravilo pon. vr.}$$

- Primjer identiteta $$\left(A+B\right)\cdot\left(\overline{A}+C\right)=\overline{A}\cdot B+A\cdot C$$

  - Dokaz:

$$\left(A+B\right)\cdot\left(\overline{A}+C\right)=A\cdot\overline{A}+A\cdot C+\overline{A}\cdot B+B\cdot C=$$

$$=A\cdot C\cdot\left(B+\overline{B}\right)+\overline{A}\cdot B\cdot\left(C+\overline{C}\right)+B\cdot C\cdot\left(A+\overline{A}\right)=$$

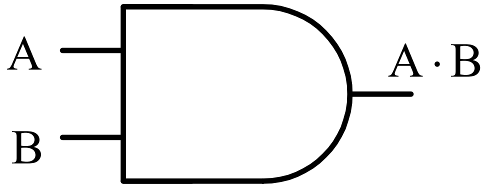
$$=A\cdot B\cdot C+A\cdot\overline{B}\cdot C+\overline{A}\cdot B\cdot C+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}+A\cdot B\cdot C+\overline{A}\cdot B\cdot C=$$

$$=A\cdot B\cdot C+A\cdot\overline{B}\cdot C+\overline{A}\cdot B\cdot C+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}=$$

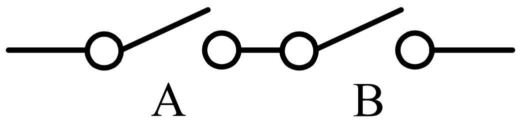
$$=A\cdot C\cdot\left(B+\overline{B}\right)+\overline{A}\cdot B\cdot\left(C+\overline{C}\right)=$$

$$=\overline{A}\cdot B+A\cdot C$$

LOGIČKO I (AND) KOLO



(*a*)

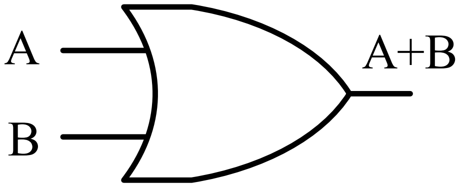


(*b*)

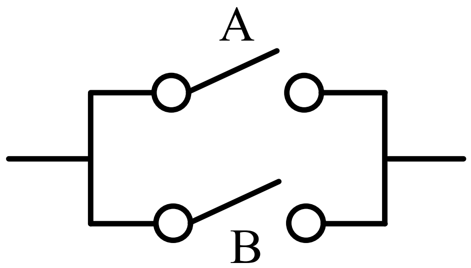
A	**B**	**A · B**
0	**0**	**0**
0	**1**	**0**
1	**0**	**0**
1	**1**	**1**

(*c*)

LOGIČKO ILI (OR) KOLO



(*a*)

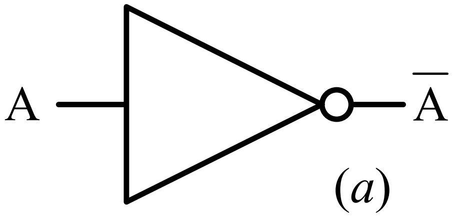


(*b*)

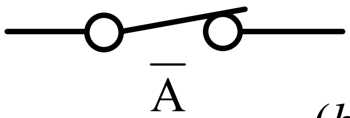
A	**B**	**A+B**
0	**0**	**0**
0	**1**	**1**
1	**0**	**1**
1	**1**	**1**

(*c*)

- LOGIČKO NE KOLO (INVERTOR)



(*a*)

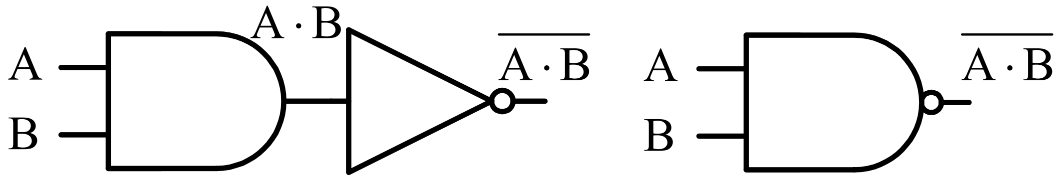


(*b*)

A	$\overline{\mathbf{A}}$
0	**1**
1	**0**

(*c*)

■ LOGIČKO NI (NAND) KOLO

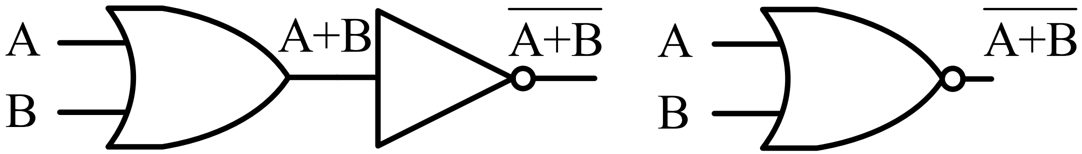


(*a*) (*b*)

A	**B**	$\overline{\mathbf{A \cdot B}}$
0	**0**	**1**
0	**1**	**1**
1	**0**	**1**
1	**1**	**0**

(*c*)

■ LOGIČKO NILI (NOR)

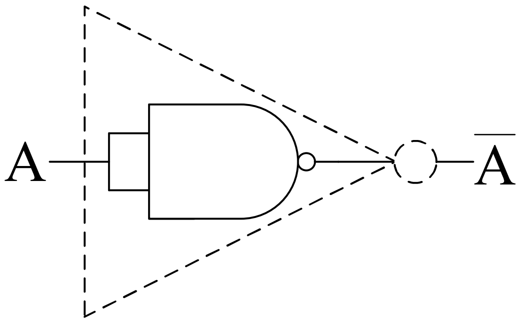


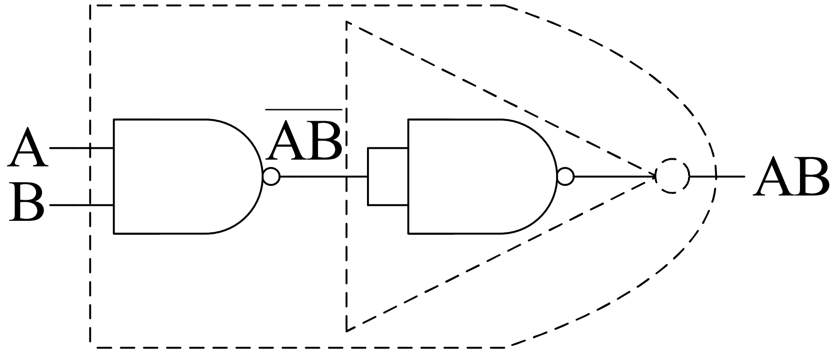
(*a*) (*b*)

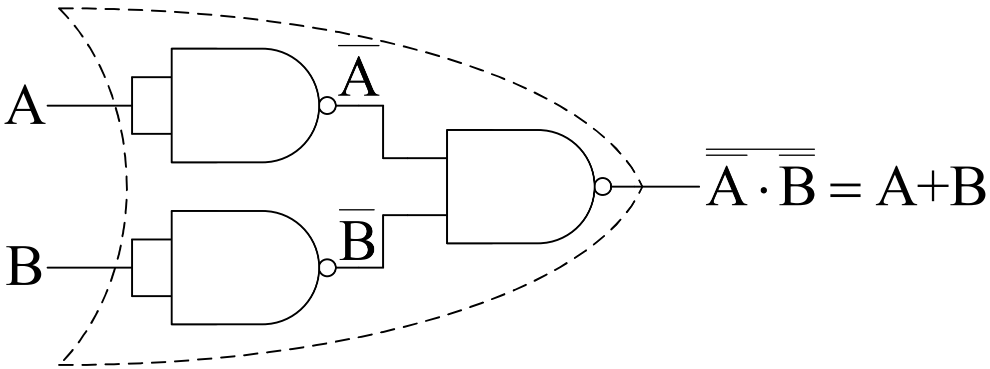
A	**B**	$\overline{\mathbf{A + B}}$
0	**0**	**1**
0	**1**	**0**
1	**0**	**0**
1	**1**	**0**

(*c*)

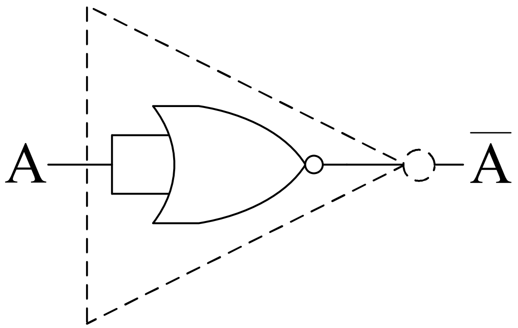
- UPOTREBA NI KOLA

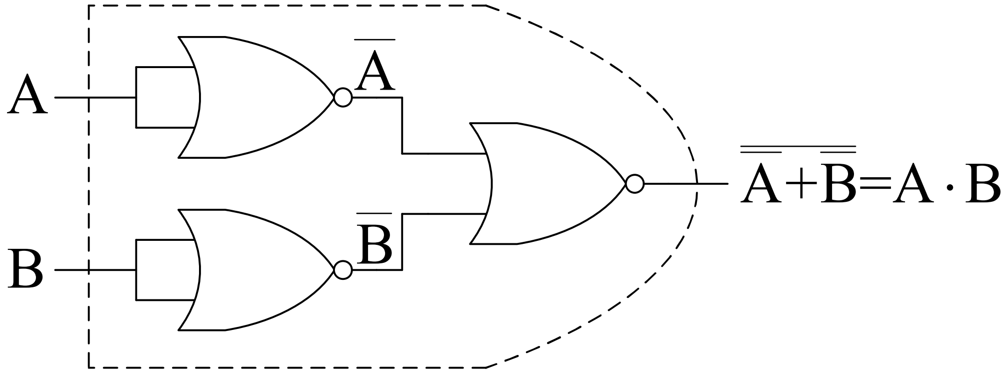


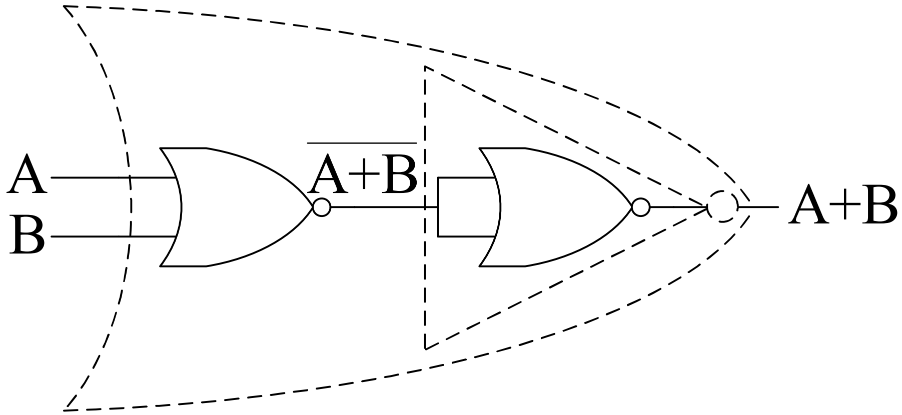




- UPOTREBA NILI KOLA







Osnovi računarstva I

Prekidačke funkcije

- Nezavisne promjenljive i njihove funkcije mogu imati samo jednu od dvije moguće vrijednosti iz skupa {0,1}. Samim tim, broj funkcija u dvočlanoj Bulovoj algebri je veoma ograničen.
- Posmatrajmo slučaj funkcije jedne promjenljive (A)

A	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

$$f_1(A) = 0$$
$$f_2(A) = A$$
$$f_3(A) = \overline{A}$$
$$f_4(A) = 1$$

- Funkcija dvije promjenljive:

A	B	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

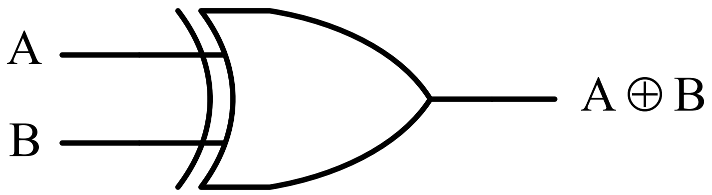
- Prepoznajemo: $f_1(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = 0$ $\quad f_2(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \mathrm{A} \cdot \mathrm{B}$

$f_4(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \mathrm{A}$ $\quad f_8(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \mathrm{A} + \mathrm{B}$ $\quad f_{11}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \overline{\mathrm{B}}$

- Uvešćemo i novu funkciju ”EKSKLUZIVNO ILI” (EX-ILI):

$$\mathrm{A} \oplus \mathrm{B} = \mathrm{f}_7(\mathrm{A}, \mathrm{B})$$

- EKSKLUZIVNO ILI (EX-OR) KOLO



(*a*)

A	**B**	**A ⊕ B**
0	**0**	**0**
0	**1**	**1**
1	**0**	**1**
1	**1**	**0**

(*b*)

Osnovi računarstva I

Bulovi izrazi i polinomi

- **Logički proizvod** (u matematičkoj literaturi **elementarna konjunkcija**) je izraz gdje su različite promjenljive A_i, i=1,...,k, sa negacijom ili bez nje, povezane logičkom I operacijom.
  - Na primjer: $\overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3, \quad \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_3, \quad \overline{A}_1 \cdot A_2$
- **Logički zbir** (u matematičkoj literaturi **elementarna disjunkcija**) je izraz gdje su različite promjenljive A_i, i=1,...,k, sa negacijom ili bez nje, povezane logičkom ILI operacijom.
  - Na primjer: $\overline{A}_1 + \overline{A}_2 + A_3, \quad A_1 + \overline{A}_3, \quad \overline{A}_1 + A_3$
- **Potpuni logički proizvod** ili **minterm** (u matematičkoj literaturi **kanonska/savršena elementarna konjunkcija**) je izraz povezan logičkom I operacijom, u kome učestvuju sve promjenljive, sa negacijom ili bez nje.
- Za datu vrijednost promjenljivih A_1, A_2, …., A_k samo jedan potpuni logički proizvod (minterm) ima vrijednost 1, a svi ostali imaju vrijednost 0.

- Svi mogući mintermovi za funkciju sa tri promjenljive:

A_1	A_2	A_3	Minterm	Indeks	Oznaka
0	0	0	$\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3$	0	m_0
0	0	1	$\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3$	1	m_1
0	1	0	$\bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3$	2	m_2
0	1	1	$\bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3$	3	m_3
1	0	0	$A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3$	4	m_4
1	0	1	$A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3$	5	m_5
1	1	0	$A_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3$	6	m_6
1	1	1	$A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$	7	m_7

- **Potpuni logički zbir** ili **maksterm** (u matematičkoj literaturi **kanonska/ savršena elementarna disjunkcija**) je izraz povezan logičkom ILI operacijom, u kome učestvuju sve promjenljive, sa negacijom ili bez nje.
- Za datu vrijednost promjenljivih A_1, A_2, …., A_k samo jedan potpuni logički zbir (maksterm) ima vrijednost 0, a svi ostali imaju vrijednost 1.

A_1	A_2	A_3	Maksterm	Indeks	Oznaka
0	0	0	$A_1 + A_2 + A_3$	0	M_0
0	0	1	$A_1 + A_2 + \bar{A}_3$	1	M_1
0	1	0	$A_1 + \bar{A}_2 + A_3$	2	M_2
0	1	1	$A_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3$	3	M_3
1	0	0	$\bar{A}_1 + A_2 + A_3$	4	M_4
1	0	1	$\bar{A}_1 + A_2 + \bar{A}_3$	5	M_5
1	1	0	$\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + A_3$	6	M_6
1	1	1	$\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3$	7	M_7

- U opštem slučaju je:

$$\overline{\mathrm{M}_i} = \mathrm{m}_i,$$
$$\overline{\mathrm{m}_i} = \mathrm{M}_i.$$

- **Zbir logičkih proizvoda (disjunktivna normalna forma)** je izraz kod koga su logički proizvodi povezani operacijom logičkog sabiranja
  - Primjer: $f\left(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3\right) = \left(\overline{\mathrm{A}}_1 \cdot \overline{\mathrm{A}}_2\right) + \overline{\mathrm{A}}_1 + \left(\overline{\mathrm{A}}_2 \cdot \mathrm{A}_3\right).$
- **Zbir potpunih logičkih proizvoda (kanonska/savršena disjunktivna normalna forma)** je izraz kod koga su potpuni logički proizvodi (mintermovi) povezani operacijom logičkog sabiranja
  - Primjer: $f\left(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3\right) = \overline{\mathrm{A}}_1 \cdot \overline{\mathrm{A}}_2 \cdot \overline{\mathrm{A}}_3 + \overline{\mathrm{A}}_1 \cdot \overline{\mathrm{A}}_2 \cdot \mathrm{A}_3 + \mathrm{A}_1 \cdot \overline{\mathrm{A}}_2 \cdot \mathrm{A}_3.$
  - Ova funkcija može se zapisati i kao:

$$f\left(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3\right) = \mathrm{m}_0 + \mathrm{m}_1 + \mathrm{m}_5 = \sum_{i=0,1,5} \mathrm{m}(i) = \sum \mathrm{m}(0,1,5).$$

- **Proizvod logičkih zbirova (konjunktivna normalna forma)** je izraz kod koga su logički zbirovi povezani operacijom logičkog množenja.
  - Primjer: $f\left(A_1,A_2,A_3\right)=\left(\overline{A}_1+\overline{A}_3\right)\cdot\left(\overline{A}_2+A_3\right)\cdot A_1$
- **Proizvod potpunih logičkih zbirova (kanonska/savršena konjunktivna normalna forma)** je izraz kod koga su potpuni logički zbirovi (makstermovi) povezani operacijom logičkog množenja.
  - Primjer: $f\left(A_1,A_2,A_3\right)=\left(\overline{A}_1+\overline{A}_2+\overline{A}_3\right)\cdot\left(\overline{A}_1+\overline{A}_2+A_3\right)\cdot\left(A_1+\overline{A}_2+A_3\right)$
  - Ova funkcija može se zapisati i kao:

$$f\left(A_1, A_2, A_3\right) = M_7 \cdot M_6 \cdot M_2 = \prod_{i=2,6,7} M(i) = \prod M(2,6,7)$$

- ***Primjer:*** Odrediti prekidačku funkciju sa tri logičke promjenljive, definisanu tabelom:

i	X	Y	Z	$F(X, Y, Z)$
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

- U obliku zbira potpunih logičkih proizvoda (mintermova):

$$F(X, Y, Z) = \sum m(0,3,5) = \overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z} + \overline{X} \cdot Y \cdot Z + X \cdot \overline{Y} \cdot Z.$$

- U obliku proizvoda potpunih logičkih zbirova (makstermova):

$$F(X, Y, Z) = \prod M(1,2,4,6,7) =$$

$$= (X+Y+\overline{Z})(X+\overline{Y}+Z)(\overline{X}+Y+Z)(\overline{X}+\overline{Y}+Z)(\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z}).$$